TUTORATO ANALISI I ~ 15/11/23

CONSIDERAZIONI VARIE SULLA DERIVABILITÀ

RECAP TEOREMA: f continua in un intorno U di x_0 e derivabile in $U \setminus \{x_0\}$.

SE ESISTE $\lim_{x\to x_0} f'(x) \in \mathbb{R}$, allora f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = \ell$

cioè $\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = \lim_{x\to x_0^-} f'(x) = \ell$

anche con $\ell_+ \neq \ell_-$

Più in generale, vale che se $\lim_{x\to x_0^\pm} f'(x) = \ell_\pm$ ESISTE finito, allora anche $\lim_{x\to x_0^\pm} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell_\pm$, quindi non c'è bisogno di calcolare il limite del rapporto incrementale

Es. f definita a tratti (ad esempio $f(x) = \left|\arctan\left(\frac{x^2-4}{x^2-9}\right)\right|$),

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-10x}{(x^2-4)^2+(x^2-9)^2} & , x \in (-\infty,-3)\cup(-2,2)\cup(3,+\infty) \\[2ex] \dfrac{10x}{(x^2-4)^2+(x^2-9)^2} & , x\in(-3,-2)\cup(2,3) \end{cases}$$

Svolto nel Tutorato del 10/11

Allora, dato che

$$\lim_{x\to 2^+} f'(x) = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \frac{-20}{25} = -\frac{4}{5}$$

esistono finiti e sono diversi, concludiamo che f NON è derivabile in $x_0 = 2$

quindi non c'era bisogno di calcolare il limite del rapporto incrementale!

Esercizio Studiare la derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

$f(0) = 0$

Una variante: $$f(x) = \begin{cases} x|x| \sin\frac{1}{x} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases} = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & , x>0 \\ 0 & , x=0 \\ -x^2\sin\frac{1}{x} & , x<0 \end{cases}$$

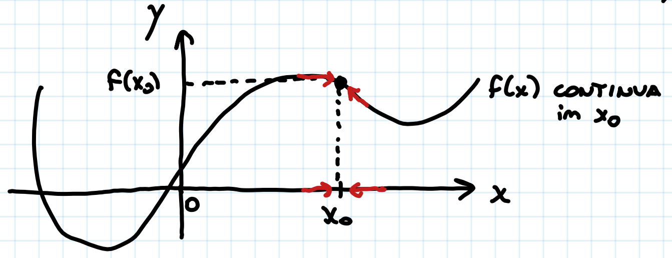
Controlliamo la continuità: $x^2 \sin\frac{1}{x}$ è continua per $x \neq 0$

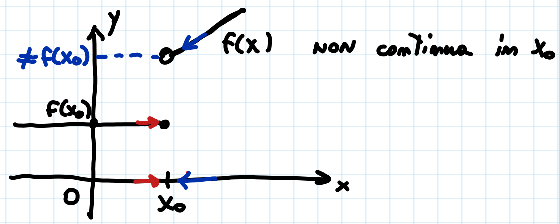
prodotto e composizione di funzioni continue per $x \neq 0$ (e derivabili)

x^2, $\sin x$, $\frac{1}{x}$

Recap

f è CONTINUA in $x_0 \in \mathrm{Dom}\, f$ se $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$





$$\lim_{x\to 0^-} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$$

$-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1 \implies -x^2 \leq x^2\sin\frac{1}{x} \leq x^2$

e per $x \to 0$ (Teorema dei carabinieri) $x^2\sin\frac{1}{x} \to 0$

$y = \frac{1}{x}$

$$\lim_{y\to -\infty} \frac{\sin(y)}{y^2} = 0$$ Che è noto (ma comunque viene da)

Analogamente $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \sin\frac{1}{x} = \lim\limits_{y\to +\infty} \frac{\sin(y)}{y^2} = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0) \implies f$ è continua in 0.

def. di f in $x=0$

In particolare f è continua su tutto $\mathbb{R}$.

Calcoliamo la derivata:

Per $x \neq 0$: $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} \implies f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\left(\sin\frac{1}{x}\right)' =$

derivabile per $x \neq 0$

$$= 2x\sin\frac{1}{x} + \cancel{x^2}\cos\frac{1}{x}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)'}_{-1/\cancel{x^2}} =$$

$$= 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

Studiamo $\lim_{x\to 0} f'(x)$:

$$\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}2x\sin\frac{1}{x}-\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}=$$

Cambio di variabile: $y=\frac{1}{x}$ $\quad\left(\begin{array}{l} x\to 0^+ \Rightarrow y\to+\infty \\ x\to 0^- \Rightarrow y\to-\infty\end{array}\right)$

$$=\underbrace{\lim_{y\to\infty}\left(\frac{2\sin(y)}{y}\right)}_{=0 \text{ come prima}}-\lim_{y\to\infty}\cos(y)=-\boxed{\lim_{y\to\infty}\cos(y)}\ \underline{\text{NON ESISTE}}$$

Possiamo quindi concludere che f NON è derivabile in 0? <u>NO</u>!

Bisogna passare dal rapporto incrementale:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\overbrace{f(0)}^{=0}}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\overbrace{x^2\sin\frac{1}{x}}^{x\neq 0}-0}{x}=\underbrace{\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}}_{\text{è il limite precedente}}=0.$$

Quindi in realtà $f'(0)$ ESISTE! (Ed è 0).

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

f è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ (sicuramente è derivabile per $x\neq 0$)

Questo è un esempio di funzione DERIVABILE (su tutto $\mathbb{R}$) ma con DERIVATA NON CONTINUA (in $x_0 = 0$).

$\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x)$ NON ESISTONO

$(f'(0) = 0)$

[In particolare f DERIVABILE $\not\Rightarrow$ f' CONTINUA]

Grafico di $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

in un intorno di $x_0 = 0$

f CONTINUA e DERIVABILE in $\mathbb{R}$.

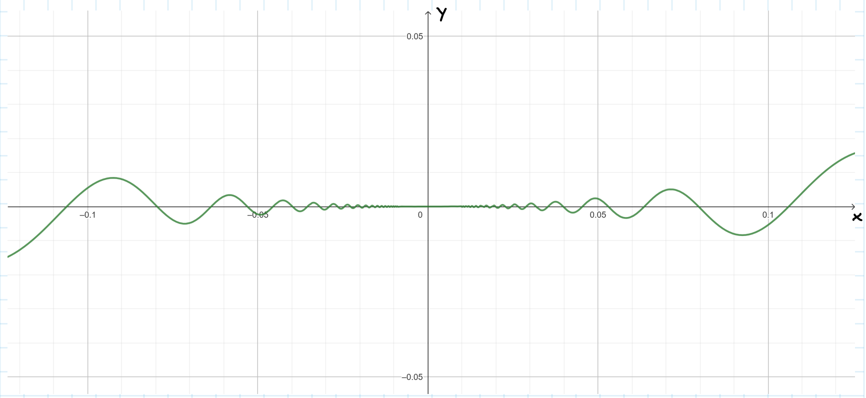
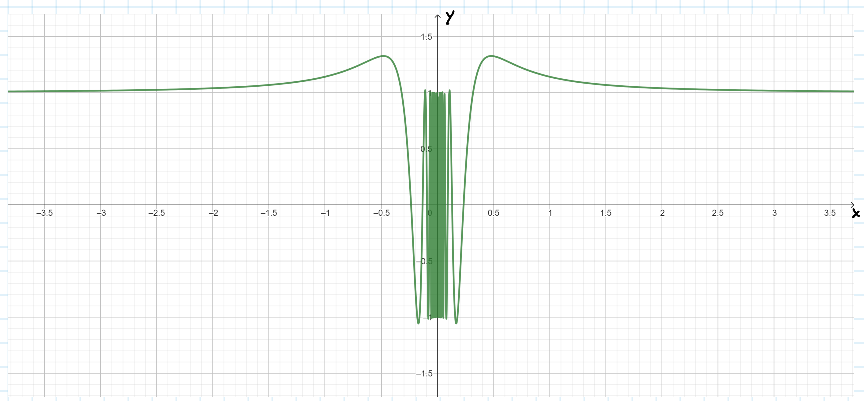


Grafico della derivata di f :

$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

f' NON CONTINUA in $x_0 = 0$.

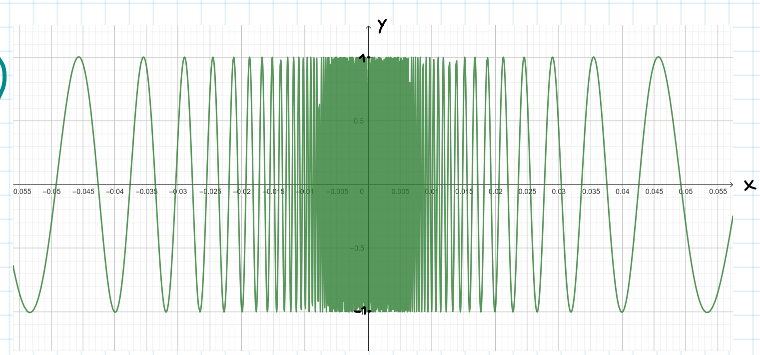


zoom (in SCALA 1 : 50)

In un intorno dx e sx di $x_0 = 0$ (piccolo a piacere)

$f'(x)$ oscilla infinite volte

(e non si raccorda a $0 = f'(0)$)



CALCOLO DI LIMITI : SVILUPPI DI TAYLOR

Esercizio 1
$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\log x - \frac{(x-1)^2}{x}}{(e^x-e)^3}$$

Soluzione

$t = x-1$

$$\lim_{t\to 0} \frac{t\log(t+1) - \frac{t^2}{t+1}}{(e^{t+1}-e)^3} = \lim_{t\to 0} \frac{t\log(t+1) - \frac{t^2}{t+1}}{e^3\,(e^t-1)^3} =$$

$e^{t+1} = e^t \cdot e$

Recap
$$\log(t+1) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots$$
$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \dots$$

IMPORTANTE: capire a quale ordine fermarsi. Come?

Facciamo un tentativo : ordine 1 $\longleftarrow$ "equivale" ai limiti notevoli che conosciamo

$\log(t+1) = t + o(t)$

$e^t = 1 + t + o(t)$

Ad esempio: $e^t - 1 = t + o(t)$

$$\frac{e^t-1}{t} = 1 + \frac{o(t)}{t} = 1 + \underbrace{o(1)}_{\to 0}$$

$$\frac{t\log(t+1) - \frac{t^2}{t+1}}{e^3\,(e^t-1)^3} = \frac{t^2 + t\,o(t) - \frac{t^2}{t+1}}{e^3(t+o(t))^3} =$$

$$= \frac{t^2 + o(t^2) - t^2/t+1}{e^3\left(t^3 + 3\underbrace{t^2 o(t)}_{o(t^3)} + 3\underbrace{t\,o(t)^2}_{o(t^3)} + \underbrace{o(t)^3}_{o(t^3)}\right)} =$$

$$= \frac{t^2 - t^2/_{t+1} + o(t^2)}{e^3\left(t^3 + o(t^3)\right)} =$$

$$= \frac{\cancel{t^2}\left(1 - \frac{1}{t+1} + \frac{o(t^2)}{t^2}\right)}{e^3\cdot t^{\cancel{3}}\left(1 + o(t^3)/t^3\right)} = \frac{\frac{t+1-1}{t+1} + \frac{o(t^2)}{t^2}}{e^3\quad t\cdot\left(1 + o(t^3)/t^3\right)} =$$

$$= \frac{\overbrace{\frac{t}{t+1}}^{\to 0} + \overbrace{\frac{o(t^2)}{t^2}}^{\to 0}}{\underbrace{e^3 \underbrace{t}_{\to 0} \cdot \left(1 + \underbrace{o(t^3)/t^3}_{\to 0}\right)}_{\text{È ANCORA UNA FORMA INDETERMINATA } (*)}} = \frac{\cancel{t}\left(\overbrace{\frac{1}{t+1}}^{\to 1} + \frac{o(t^2)}{t^3}\right)}{\cancel{t}\, e^3 \left(1 + \underbrace{\frac{o(t^3)}{t^3}}_{\to 0}\right)}$$

Dov'è il problema? NON SAPPIAMO GESTIRE $\frac{o(t^2)}{t^3}$

[t^3 è un $o(t^2) \rightsquigarrow \frac{t^3}{t^3} = 1$

$2t^3$ è un $o(t^2) \rightsquigarrow \frac{2t^3}{t^3} = 2$

Non possiamo dire nulla su $\lim_{t\to 0} \frac{o(t^2)}{t^3}$]

Quindi, in questo caso, lo sviluppo al primo ordine NON È SUFFICIENTE!

Per risolvere la forma indeterminata $(*)$, dobbiamo ottenere nello sviluppo o(qualcosa) in modo che $\lim_{t\to 0} \frac{o(\text{qualcosa})}{t^3} = 0$.

Basterebbe $\frac{o(t^3)}{t^3}$, che sappiamo gestire, quindi consideriamo lo sviluppo di $\log(1+t)$ al 2° ordine:

$\frac{o(t^2)}{t^3}$ NO $\rightsquigarrow$ $\frac{o(t^3)}{t^3}$ sì

(salgo di 1)

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

Per e^t va bene fermarsi all'ordine 1, perché sviluppando otteniamo $o(t^3)/t^3$ che sappiamo gestire

(Infatti il problema dell'ordine si presenta al numeratore)

$$\frac{t\log(t+1)-\frac{t^2}{t+1}}{e^3(e^t-1)^3}=\frac{t\left(t-t^2/2+o(t^2)\right)-\frac{t^2}{t+1}}{e^3\left(t^3+o(t^3)\right)}=$$

$$=\frac{t^2-t^3/2-t^2/(t+1)+o(t^3)}{e^3\,t^3\left(1+o(t^3)/t^3\right)}=$$

$$=\frac{-t^3/2+t^2\overbrace{\left(1-\frac{1}{t+1}\right)}^{t/(t+1)}+o(t^3)}{e^3\,t^3\left(1+o(t^3)/t^3\right)}=\frac{-t^3/2+t^3/_{t+1}+o(t^3)}{t^3\left(e^3\left(1+o(t^3)/t^3\right)\right)}$$

passando all'ordine 2 lo sappiamo gestire!

$$=\frac{\cancel{t^3}\left(-\frac{1}{2}+\overbrace{\frac{1}{t+1}}^{\to 1}+\overbrace{\frac{o(t^3)}{t^3}}^{\to 0}\right)}{\cancel{t^3}\,e^3\left(1+\underbrace{\frac{o(t^3)}{t^3}}_{\to 0}\right)}\xrightarrow[t\to 0]{}\frac{-\frac{1}{2}+1}{e^3\cdot 1}=\frac{1}{2e^3}.$$

Andava bene anche sviluppando $\log(t+1)$ con ordine maggiore di 2?] sì : $\frac{o(t^4)}{t^3}=\underbrace{t}_{\to 0}\cdot\underbrace{\frac{o(t^4)}{t^4}}_{\to 0}\to 0$ è un $o(t)$

<u>Osservazione</u> : se trovo $o(t^n)/t^m$ con $n\geq m$ sono a posto;

se trovo $o(t^n)/t^m$ con $n<m$, devo migliorare la stima aumentando l'ordine!

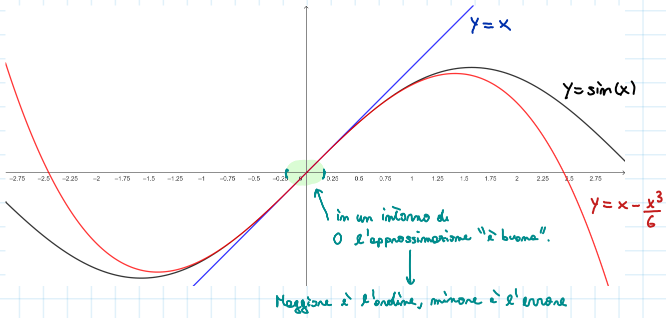
- Cosa stiamo facendo in pratica?

Stiamo approssimando funzioni attraverso POLINOMI:
- calcolo dei limiti più semplice
- idea del comportamento asintotico in un intorno di un punto

maggiore è l'ordine, maggiormente accurata è la stima

cioè più è piccolo l'errore («distanza» tra funzione e polinomio approssimante)

Ad esempio, consideriamo $y = \sin(x)$



$$\sin(x) = x + \overbrace{o(x)}^{\text{resto}}$$
$$= x - \frac{x^3}{6} + \overbrace{o(x^3)}^{\text{resto}}$$

- $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + o(x) - x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x} = 0$

L'approssimazione di $\sin x$ con x è sufficiente

- $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x^2}$

L'approssimazione con x NON è sufficiente

$\rightsquigarrow$ Miglioro: $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3/3 + o(x^3)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{3} + \underbrace{\frac{o(x^3)}{x^2}}_{\to 0} \right) = 0$$

Ora è sufficiente

Esercizio 2 $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} x \left(\arctan(x) - \frac{\pi}{2} \right)$

Soluzione

1) Vale la seguente uguaglianza per $x > 0$:

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Esercizio Sia $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, definita per $x > 0$. Provare che f è costante (f') e che quindi $(x = 1)$ è uguale a $\frac{\pi}{2}$.

A questo punto si ha $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} x\left(-\arctan\frac{1}{x}\right) \overset{t = 1/x}{=} \lim_{t\to 0^+} \left(-\frac{\arctan(t)}{t} \right) = -1.$

Secondo metodo

2) $t = \frac{1}{x}$, $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{\arctan\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{\pi}{2}}{t}$

De L'Hôpital : $\frac{0}{0}$, $a(t) = \arctan\frac{1}{t} - \frac{\pi}{2}$, $b(t) = t$ continue e derivabili per $t>0$, $b'(t) = 1 \neq 0$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\left(\arctan\frac{1}{t} - \frac{\pi}{2}\right)'}{\underbrace{(t)'}_{=1}} = \lim_{t\to 0^+} \left(\arctan\frac{1}{t}\right)' = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}\left(\frac{1}{t}\right)' =$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{-\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{-1}{1+t^2} = -1$$ esiste

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0^+} \frac{\arctan\frac{1}{t} - \frac{\pi}{2}}{t} = -1 .$$

Terzo metodo

3) $x = \tan t$ $\quad \left(x \to +\infty \Rightarrow t \to \frac{\pi}{2}^-\right)$

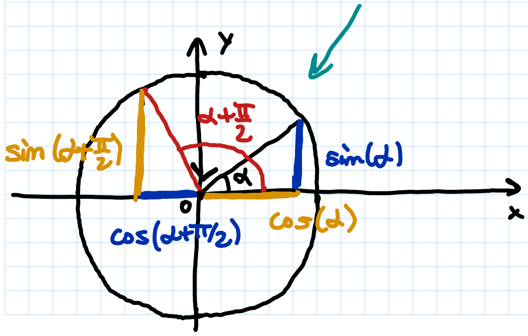
$$\lim_{t\to \frac{\pi}{2}^-} \tan t \cdot \left(\arctan(\tan t) - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \lim_{t\to \frac{\pi}{2}^-} \tan t \cdot \left(t - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$y = t - \frac{\pi}{2} < 0$

$$= \lim_{y\to 0^-} \tan\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\cdot y = \lim_{y\to 0^-} \frac{\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}\cdot y =$$

$$= \lim_{y\to 0^-} \frac{\cos y}{\underbrace{-\sin y}}\cdot y = \lim_{y\to 0^-}\left(-\frac{y}{\underbrace{\tan y}_{\to 1}}\right) = -1$$



Osservazione : nel 1° e 3° metodo ci siamo ricondotti a limiti notevoli ⇝ Taylor al 1° ordine

Esercizio 3 $\lim_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$

Soluzione

Sostituzione $t = \frac{1}{x}$ $(t \to 0^+)$

$$x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right) = \frac{1}{t^2}\left(e^t - e^{\overbrace{\frac{t}{1+t}}^{\to 0}}\right)$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

MI FERMO A $o(t^2)$ perché al denom. abbiamo un t^2.

$$e^{\frac{t}{1+t}} = 1 + \frac{t}{1+t} + \frac{\left(\frac{t}{1+t}\right)^2}{2} + o\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^2\right)$$

$$o\left(\frac{t^2}{\underbrace{(1+t)^2}_{\to 1 \text{ : non conta}}}\right) = o(t^2) \quad \text{perché per } t \to 0,\ (1+t)^2 \to 1$$

$$\rightsquigarrow e^{\frac{t}{1+t}} = 1 + \frac{t}{1+t} + \frac{t^2}{2(1+t)^2} + o(t^2)$$

Sostituiamo:

$$\frac{1}{t^2}\left(\cancel{1} + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) - \cancel{1} - \frac{t}{1+t} - \frac{t^2}{2(1+t)^2} + o(t^2)\right) =$$

$$= \frac{1}{t} + \frac{1}{2} - \frac{1}{(1+t)t} - \frac{1}{2(1+t)^2} + \frac{o(t^2)}{t^2} =$$

$$= \underbrace{\underbrace{\frac{1}{t}}_{\frac{1}{\cancel{t}}}\underbrace{\left(1 - \frac{1}{1+t}\right)}_{\frac{\cancel{t}}{1+t}}}_{= \frac{1}{1+t} \to 1} + \frac{1}{2} - \underbrace{\frac{1}{2(1+t)^2}}_{\to \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{o(t^2)}{t^2}}_{\to 0} \xrightarrow[t\to 0]{} 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1.$$

Quindi il risultato del limite è 1.